

The background is a solid green color with a repeating pattern of white line-art icons. These icons include a graduation cap, a lightbulb, a target with an arrow, a bar chart, a clock, a document with a checklist, a person wearing glasses, a book, a hand holding a trophy, a computer monitor with a line graph, a gear, and a presentation board with the letters 'ABC'.

ProjehCenter

www.ProjehCenter.ir

 | @projehcenter

 | @projehcenter_ir



...

فهرست مطالب

موضوع	صفحه
۱- مقدمه	۱
۲- ایده اصلی LES	۳
۳- Filtering	۴
۳-۱ Schumann's approach	۴
۳-۲ Filtering	۶
۴- Governing Equations	۸
۵- Sub grid-Scale modelling (SGS)	۸

۱- مقدمه

پدیده های مربوط به جریان سیالات در علوم مهندسی و در طبیعت بسیار رخ می دهند و مهم می باشند. در اغلب موارد این پدیده ها همراه با جریانهای نقوش (TURBU LENT) و علی الخصوص جریانهای نقوش برشی (Turbulent Shear flow) می باشد. تخمین درست از مشخصات این جریانها نه تنها در مطالعه مکانیسم جریان بلکه برای طراحی انواع وسایل مهندسی حائز اهمیت است.

روش های تجربی تنها راه اصولی برای حل مسائل جریانهای مغشوش برشی بوده است. مقادیر زیادی اطلاعات در مورد انواع جریانها جمع آوری شده است که برای فهم توربلانس و طراحی وسایل مهندسی از آنها استفاده شده است. بوسیله کامپیوترهای سریع و پیشرفته امروزی و حافظه بالای آنها، شبیه سازی کامپیوتری نیز به روش سومند برای حل جریانهای مغشوش تبدیل گردیده است.

اما در عین حال باید به این نکته توجه زیادی داشت که انواع مقیاسهای (Scal) زیادی در جریان توربلا وجود دارد و در نتیجه ما نمی توانیم این مقیاسها را حتی بوسیله کامپیوترهای قوی امروزی حل نمائیم و ساختن مدلهایی برای مقیاسهای کوچک نوسانات که مرتبط با پروسه پخش انرژی می باشد غیر قابل صرف نظر می باشد.

برای شبیه سازی جریانهای مغشوش بوسیله حل عددی معادلات ناویر - استوک و پیوستگی و با توجه به تئوری توربلانس همگن مقیاس پخش انرژی ld برابر است با :

$$ld = O[v^3 / 4]^{1/4}$$

ε همان نرخ پخش انرژی بر واحد جرم سیال می باشد. آزمایشات نشان می دهد که

ε توسط طول مشخصه L و سرعت مشخصه v جریان معین می گردد:

$$\varepsilon = O(V^3 / L)$$

از بالا داریم:

$$\text{عدد}, \quad Re = \frac{VL}{D} \quad ld/L = O(Re^{-3/4})$$

حال سعی می کنیم که تعداد نقاط مش (meshpoints) (N) که در شبیه سازی

جریان های مغشوش با استفاده از روش F.D (المان محدود) و معادلات ناویر استوک و

پیوستگی لازم می باشد را حدس بزنیم

از معادلات بالا:

$$N = O[(L/d)^3] = O(Re^{q/4})$$

در پدیده های طبیعی عدد Re عموماً بسیار بزرگ می باشد به طور مثال برای عدد

ایندارز از مرتبه 10^6 که غیر معمول هم نیست N از مرتبه 10^{13} بدست می آید اگر

بخواهیم مستقیماً مسئله را حل کنیم لذا روش (Direct Numerical Simulaton)

DNS حتی با کامپیوترهای امروزی در حل مسائل توربلانست کاربردی به نظر نمی

رسد.

۲- ایده اصلی LES:

فرض کنید که کسی بخواهد از روش DNS مسئله ای را حل نماید ولی تعداد مش مورد نیاز او از ظرفیت کامپیوتر تجاوز ننماید بنابراین وی مش درشت تری انتخاب می کند. این مش درشت تر می تواند ادی (eddy) های بزرگ را حل نماید ولی نمی تواند آنهایی که از یک یا دو سلول شبکه کوچکتر هستند را حل نماید. با توجه به این نکته حل شبکه بزرگتر بدون در نظر گرفتن تأثیر ادی های کوچکتر بر روی بزرگترها غلط می باشد. از ۱ مدل ریز شبکه (Subgrid Sode) که بعداً مفصلاً توضیح می دهیم بوجود می آید.

پس در این مدل تنها کوچکترها مدل می شوند و روی های بزرگتر مستقیماً بدون مدل کردن بدست می آید مزیت این روش نسبت به روشهایی که کل میدان حل را مدل می کنند مثل روش متوسط گیری رینواند معادله ناویر استوک (PANS) در همین است چون این روشها در مسائل خاص مثل چرخش و با مشکلاتی مواجه هستند . اما روش LES به ما امکان حل مسائل پیچیده غیر همگن و ناپایدار را می دهد.

۳- Filtering:

با توجه به ایده اصلی LES که در بخش قبل بیان گردید نیازمند آن هستیم که به گونه ای بین ساختارهای کوچک که حل نمی شوند و ساختارهای بزرگ که حل می گردند تمایز قائل شویم و در نهایت بتوانیم از U به \bar{U} (متوسط سرعت) برسیم.

برخلاف متوسط گیری زمانی رینولد ($\langle u \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$) این یک عملگر مکانی می باشد.

در واقع روشهای RANS و LES متوسط گیری را در بعدهای مختلفی انجام دهیم می دهند. این اختلاف مانع از آن می شود که بتوان آنها را به راحتی به هم مرتبط کرد. کوششهای متعددی در این رابطه انجام گرفته است که بعداً به آن می پردازیم:

۳-۱ Schumann's approach:

روش بالانس حجمی (Schumann(1975) با ایجاد شبکه حجم محدود (F.V) شروع می شود. برای یافتن مقدار متوسط از فرمول زیر استفاده می کند.

$$\bar{f} = \frac{1}{\prod_{\alpha=1}^3 D_{\alpha}} \iiint_{|y_{\alpha}| < D_{\alpha}/2} f(x+y) dy$$

در جهت x_1 داریم:

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1} = \dots \frac{1}{3 \Delta \alpha} \int_{-D/2}^{\Delta/2} \int_{-D/2}^{\Delta/2} d_{1/3} \times [f(x_1 + \frac{D_1}{2}, x_2, y_2, x_3 + y_3) - f(x_1 - \frac{\Delta_1}{2}, x_2 + y_2, x_3 + y_3)]$$

باید به این نکته بسیار مهم توجه کرد که در این روش اول میدان حل شبکه بندی شد و بعد معادله در هر ساختار اعمال گردید لذا مقادیر \bar{f} در هر بخشی از میدان یا

روی سطوح آن ناپیوسته می باشد بنابراین $\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}$ تنها می تواند شبیه به دیفرانسیل عددی روی نقاط شبکه اعمال گردد و با مفهوم معمول در دیفرانسیل و مشتق متفاوت است یعنی

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_1} \neq \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_1}$$

چون روش Schumann حجم محدود می باشد باید از معادلات ناویر استوک و پیوستگی انتگرال روی حجم بگیرد:

$$v_{\bar{u}} = \frac{1}{\Delta x} \int_v u(x) dx$$

با توجه به قوانین گوس این مقادیر را می توان به مقادیر متوسط روی سطوح نسبت داد مثل $j_{\bar{uv}}$. این مقادیر باید بوسیله مقادیر نقاط شبکه بیان شوند. اگر شبکه به اندازه کافی ریز باشد می توانیم $j_{\bar{uv}}$ را با جایگزین نماییم که با حداقل خط در روش عددی مواجه شویم این کار در روش DNS انجام می شود. اما اگر شبکه به اندازه کافی ریز نبود اختلاف $(j_{\bar{uv}} - j_{\bar{u}} j_{\bar{v}})$ حائز اهمیت می شود و باید توسط یک مدل سازی به حساب آید. این مدل را مقیاس ریز شبکه یا SGS (Sabgrid – Scale) می گویند.

با توجه به آنچه بیان گردید می توان نوشت

$$\begin{aligned} l\bar{f} &= \frac{1}{\Delta_2 \Delta_3} \int_{-\Delta_2/2}^{\Delta_2/2} \int_{-\Delta_3/2}^{\Delta_3/2} f(x_1, x_2, y_2, x_3 + y_3) dy_2 dy_3 \\ \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_1} &= \frac{1}{\Delta_1} [\bar{f}(x + \frac{\Delta_1}{2}, x_2, x_3) - \bar{f}(x - \frac{\Delta_1}{2}, x_2, x_3)] = \delta_1^1 \bar{f} \\ f'_a &= f - {}^a \bar{f} \Rightarrow f = \bar{f} \text{ , } \bar{f} f' = 0 \text{ , } {}^{\alpha a} \bar{f} f'_a = 0 \end{aligned}$$

۲-۳: Filtering

روش دیگری که در آن \bar{u} تعیین می گردد توسط Leonaerd (1974) به صورت زیر پیشنهاد شد:

$$\bar{u} = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, x') u(x') dx' \quad -7$$

G یک تابع اختیاری و محلی می باشد $G(x, x')$ تنها وقتی بزرگ می باشد که (x, x') کوچکتر از طول مقیاس با عرض فیلتر کوچکتر باشد. طول مقیاس طولی است که متوسط گیری در آن انجام می گردد.

عمل فیلترینگ باعث برطرف شدن نوساناتی که کوچکتر از طول مشخصه مقیاس هستند می شود در واقع ادی های بزرگتر از طول مشخصه Lary Eddy محسوب می شوند که مستقیماً حل می گردد و آنهایی که کوچکتر از طول مشخصه هستند “Small eddy” محسوب می شوند که باید مدل شود.

سه نوع معمول برای تابع G مورد استفاده قرار می گیرد.

1) Gaussian filter

$$G(x) = \sqrt{\frac{\sigma}{\pi \Delta^2}} \exp\left\{-\frac{Gx^2}{\Delta^2}\right\}$$

2) Cut off Spectral filter

$$G(x) = \frac{2 \sin\left[\frac{\pi x}{\Delta}\right]}{\pi x}$$

3) Tof hat / Box filter

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & (|x| < \frac{\Delta}{2}) \\ 0 & (|x| > \frac{\Delta}{2}) \end{cases}$$

که Δ در همه موارد عرض فیلتر می باشد.

تبدیل معادله ۷ در فضای می تواند مفید باشد در این صورت انتگرال کانولوشن

تبدیل به ضرب ساده می شود.

$$u(\omega) = \int u(x) e^{-i\omega x} \rightarrow \bar{u}(\omega) = \underline{G}(\omega) \cdot \underline{u}(\omega)$$

ω فرکانس مشخصه می باشد که متغیر غیر وابسته است.

شکل ۱ نشان دهنده تأثیر عرض فیلتر می باشد [fig3] و شکل ۲ فیلتر کردن را در

فضای فوریه نشان می دهد. در این روش از روابط زیر می توان استفاده کرد.

$$u = \bar{u} + u', \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \quad \frac{\partial^n \bar{u}}{\partial x^n}, \frac{\partial^n \bar{u}}{\partial x^n}, u \neq \bar{u}$$

۴- Governing Equations:

توسط فیلترینگ توانستیم که ریزمقیاسها را از بزرگ مقیاسها جدا کرده و معادلات حاکم را برای بزرگترها که مستقیماً حل می شوند بنویسیم:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + g_i \beta (g - g_o) S_{ij}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial u_j \theta}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu}{Pr} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)$$

که در آن:

$$\rho = (\text{m}^3 / \text{s}) \text{ دانسیته هوا}$$

$$P = (\text{Pa}) \text{ فشار هوا}$$

$$\nu = (\text{m}^2 / \text{s}) \text{ دینامیک}$$

$$Pr = \text{عدد مولکولی}$$

$$g = (^{\circ} \text{C}) \text{ دمای هوا}$$

با اعمال فیلتر جعبه ای (Box filter) (معادله ۱۵) بر روی معادلات فوق (۱۳-۱۵)

داریم:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + g_i \beta (\bar{g} - g_o) \delta_{ij}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_j \bar{g}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu}{p_r} \frac{\partial \bar{g}}{\partial x_j} \right)$$

دو ترم غیر خطی بعد از اعمال این فیلتر به جا می ماند $\overline{u_i u_j}$ $\overline{u_j g}$ که به صورت

مجموعه از ترمهای فیلتر شده و ترمهای ریز شبکه ای در می آید:

$$\overline{u_i u_j} = \bar{u}_i \bar{u}_j + (\overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j) = \bar{u}_i \bar{u}_j + \tau_{ij}$$

$$\overline{u_j g} = \bar{u}_j \bar{g} + (\overline{u_j g} - \bar{u}_j \bar{g}) = \bar{u}_j \bar{g} + h_j$$

که در آن τ_{ij} و h_j به ترتیب تنش های ریندلند ریز شبکه ای (Scas Reynolds

stresses) و شار حرارتی ریز شبکه ای (SGS heat flux) می گویند.

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j$$

$$\alpha_j = \overline{u_j g} - \bar{u}_j \bar{g}$$

که باید مدل شوند تا مسئله حل گردد.

با جایگذاری دو ترم غیر خطی در معادلات (۱۶-۱۸) با معادلات a-b (۲۱)

معادلات حاکم بر جریان در روش LES بصورت زیر بدست می آید:

(۲۲-a)

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + g_i \beta (\bar{g} - g_o) S_{ij}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (22-b)$$

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_j \bar{g}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\nu}{\text{pr}} \frac{\partial \bar{g}}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial h_j}{\partial x_j} \quad (22-c)$$

از این دو ترم به عنوان تأثیر ریز شبکه های حل نشده بر روی شبکه های شده نیز یاد می شود. از دیدگاه ریاضی این ترمها به علت غیرخطی بودن ترم جابه جایی (conv) و ناسازگاری آن با عملگر فیلتر کننده که خطی می باشد بوجود می آیند. خاصیت مهم \bar{u}_i آن است که وابسته به زمان می باشد و در نتیجه روش LES هم به ناچار ناپایدار می شود.

به علاوه \bar{u}_i همیشه وابسته به سه بعد مکانی می باشد (مگر در موارد خیلی خاص) نکته دیگر اینکه اگر در حد $(0 \rightarrow ??)$ سیل نماید این ترمها هم به صفر سیل می کنند و \bar{u} هم به سمت u سیل می نماید و تمام مقیاسهای کوچک و بزرگ به صورت دقیق حل می شود این یعنی LES به سمت DNS حرکت می کند.

باید به این نکته اشاره کرد که فیلترینگ که در معادله ۷ توضیح دادیم به راحتی با شرایط مرزی سازگار نمی گردد و در نزدیکی دیواره ها و مرزها مسائل زیادی بوجود می آید که موضوع بحث های گوناگونی است از آن جمله مقاله (Ghosal Moin 1995) می باشد.

۵-Sub grid-Scale modelling (SGS)

مدل مقیاس ریز شبکه ای (SGS) مختص به روش LES می باشد و به نوعی وجه تمایز این روش با دیگر روشهای موجود است. همانطور که می دانید انرژی از ساختارهای بزرگ مقیاس به سمت ساختارهای کوچک مقیاس سرازیر (Cas cade) می شود. بنابراین اولین وظیفه SGS آن است که مطمئن شود مقدار انرژی تخلیه شده در LES برابر مقدار انرژی سرازیر شده در حالتی است که مسئله به طور کامل و دقیق به روش DNS حل می شود. باید توجه داشت که سرازیر شدن انرژی فرآیندی است که باید متوسط گیری شود. در یک جریان آشفته امکان دارد که به صورت محلی یا آنی حرکت انرژی خیلی بیشتر با کمتر از مقدار متوسط آن و یا حتی بر عکس جریان انجام گیرد.

لذا ایده آل آن است که SGS بتواند این تغییرات محلی و آنی را هم به حساب بیاورد. اگر مقیاس شبکه خیلی ریزتر از مقیاس قالب جریان باشد یک مدل خام و ساده برای نشان دادن رفتار صحیح جریان کافی است و نیازی به مدلهای پیچیده نداریم به عبارت دیگر اگر مقیاس شبکه درشت باشد و جریان پر انرژی، ناهمگن و غیر ایزوتروپیک باشد مدل SGS باید با کیفیت بهتری طراحی گردد. بدیهی است دو راه حل موجود می باشد، اول آنکه مدل SGS را تثبیت کنیم و شبکه را ریزتر کنیم که در حد نقش SGS از بین می رود و LES به DNS تبدیل می شود. ریز کردن شبکه بوسیله سرعت کامپیوترها و افزایش هزینه زمانی محاسبات محدود می گردد. در

استراتژی دوم به طور مثال یک معادله دیگر با مدل پیچیده تر SGS حل می گردد که می تواند در مقایسه با راه اول هزینه کمتری داشته باشد.

اگر به مسئله از دیدگاه عددی نگاه کنیم مسئله اختلاف بین معادله دیفرانسیل دقیق و مقادیر دیفرنس شده و جدا شده آن مطرح می گردد. این اختلاف در نزدیکی حدود بیشتر هم میشود. در روش DNS مسئله چندان نگران کننده نیست اما در LES این مقیاسها تأثیر عمیقی روی مدل SGS می گذارد که بعداً توضیح داده می شود. لذا در LES روش جدا سازی معادله و مدل SGS باید با هم دیده شوند. بعضی روشها مثل روشهای مرتبه پایین Pwined موجب ایجاد خطای بخش عددی قابل توجهی می شوند.

ذیلاً بعضی از روشهای SGS را که متداول تر می باشد مورد بررسی قرار می دهیم:

(۵-۱) Smagorinsky model : اولین بار توسط Deardorff (1970) مورد استفاده

قرار گرفت . این مدل (Smagorinsky 1963) اولین مدل SGS می باشد و هم اکنون

نیز بسیار مورد استفاده قرار می گیرد در این مدل همانند اغلب مدلهای معمول SGS

از یک فرضی ادی (eddy viscosity) استفاده می شود.

$$\tau_{ij} = -2\nu_{SGS}\bar{S}_{ij} \quad -23$$

که در آن \bar{S}_{ij} تانسور نرخ کرنش می باشد.

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad -24$$

و لزجت ادی (eddy viscosity) می باشد به صورت زیر تعریف می شود.

$$\nu_{SGS} = (C_{SGS}\bar{\Delta})^2 |\bar{S}| = C\bar{\Delta}(2\bar{S}_{ij}.\bar{S}_{ij})^{\frac{1}{2}} \quad -25$$

که در آن:

$$C_{SGS} = \text{ثابت Smagorinsky}$$

$$\bar{\Delta} = \text{طول مقیاس برای ادی های معمول SGS}$$

$$C = (CSGS)^2 = \text{ضریب مدل}$$

طول مقیاس $\bar{\Delta}$ با اندازه شبکه مربوط است و معمولاً به این صورت بیان می شود:

$$\bar{\Delta} = (\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z)^{\frac{1}{3}} \quad -26$$

به صورت مشابه تنش های دینولدز SGS برای شار حرارتی SGS در معادله انرژی

فیلتر شده داریم:

$$h_j = -\alpha_{SGS} \frac{\partial \bar{g}}{\partial x_j} \quad -27$$

که در آن α_{SGS} - ضریب پخش ادی در SGS می باشد:

$$\alpha_{SGS} = C \bar{\Delta}^2 \frac{|\bar{S}|}{Pr_{SGS}} \quad -28$$

بنابراین شار حرارتی ریز شبکه به صورت زیر حل می شود:

$$h_j = ?? \bar{\Delta}^{-2} \frac{|\bar{S}|}{Pr_{SGS}} \frac{\partial \bar{g}}{\partial x_j} \quad -29$$

که در آن :

$$Pr_{SGS} = S \cdot q$$

در نزدیکی دیواره ها $v_{SGS} D(y^+)$ نوشته می شود که در آن:

$$D(y^+) = 1 - e^{-y^+/A^+}, \quad A^+ = 25 \quad -30$$

این تابع از روشهای آماری بدست آمده است. در y^+ های کوچک $(y^+)^2$ می باشد در صورتیکه باید v_{SGS} به صورت تابعی از $(y^+)^3$ رفتار کند لذا این تابع با یک تابع میرایی جانشین تصحیح شد.

(Piomelli, Moien & Ferziger 1993) -۳۱

$$D(y^+) = (1 - e^{-(y^+/A^+)^3})^{\frac{1}{2}}$$

دلیل اصلی استفاده زیاد از این مدل سادگی آن می باشد اما نقطه ضعف آن در این است که C_{SGS} باید با توجه به نوع جریان و عدد ریندلند و یا روش جداسازی عددی آن تعیین و بهینه گردد. این نوع اعمال میرایی در نزدیکی دیواره چندان قابل اطمینان نیست به علاوه اینکه فرض مدل مانند بقیه مدلها بر بنا شده و اجازه جریان برگشتی را نمی دهد.

Dynamic Subgrid – Scale model CDS (۵-۲)

مدل دینامیک (Germano et al. 1991) روشی برای محاسبه ضریب C در هر مرحله زمانی به صورت تابعی از مکان می باشد که از اطلاعات موجود در میدان حل شده سرعت استفاده می کند. این روش دو مزیت اصلی نسبت به تعیین ضریب C ثابت و سازگار کردن آن برای هر مسئله دارد اول آنکه این متدیک فرآیند سیستماتیک برای محاسبه جریانهای که از آنها سابقه قبلی نداریم و لذا هیچ راهنمایی برای سازگار کردن ثابت C برای آن مسئله نداریم در اختیار قرار می دهد و دوم در جریانهای ناهمگن ممکن است مقدار C بهینه به صورت تابعی از مکان باشد که نمی توان با یک ثابت C مسئله را به صورت دقیق حل نمود. از همین منظر در جریانهای گذارای

مغشوش و یا انواع عمومی تر آن مشخصه های آماری جریان با زمان تغییر می کند.
برای حل اینگونه مسائل باید فرضیات اضافی دیگری انجام دهیم مثل تابع میرایی
دیواره